ID．微積分と初等線形代数 I　講義報告[1]

2008 年 7 月 6 日（日）　11:00 - 13:00

今回の講義では（線型）部分空間と線型写像について扱った。部分空間については、まず前回の講義で扱った「一般平面」を用いて定義し、さらに $Span$ の概念を取り扱った。線型写像については、今回はその導入部までである。

1　幾何学的（線型）部分空間

定義 1.1 (幾何学的（線型）部分空間)**.** $M \subset \mathbb{R}^n$ が原点を含む平面であるとき、M を幾何学的（線型）部分空間という。

定理 1.1. M が幾何学的（線型）部分空間である必要十分条件は、

1. $\mathbf{0} \in M$

2. $u, v \in M \to u + v \in M$

3. $\lambda \in \mathbb{R} u \in M \to \lambda u \in M$

を満たすことである。M を $\mathbb{R}^n$ のベクトルの部分集合とみるとき、M を $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間という。

定理 1.2 (線型部分空間と平面)**.**

(1) U を $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とし、$\mathbf{a}(\in \mathbb{R}^n)$ を定ベクトルとする。このとき $F = a + U$ とすると、F は $\mathbf{a}$ を通る平面である。

(2) F を任意の $\mathbb{R}^n$ の平面とする。このとき線型部分空間 U_F が存在して、$F = \mathbf{a} + U_F$ と表示される。ただし、$\mathbf{a} \in F$。このとき U_F は $\mathbf{a}$ の選び方によらず定まる。U_F を平面 F の底空間という。

練習問題 1.1.

(1) $U_1, U_2, \ldots, U_r$ を線型部分空間とする。このとき、

$$\sum_{j=1}^{r} U_j = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_r \mid u_j \in U_j \, (1 \geq j \geq r)\}$$

は線型部分空間であることを示せ。

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を線型部分空間族とする。このとき $\cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は線型部分空間であることを示せ。

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

2　線型部分空間の生成

定理 2.1. $D(\subset \mathbb{R}^n)$ を空でない集合とするとき、D を含む最小の線型部分空間族が存在する。

この最小の線型部分空間を D で生成される線型部分空間と呼び、$Span(D)$ と記す。

補題 2.1. W を $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とする。$a_1, a_2, \ldots, a_r \in W$ に対して、

$$Span(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) = \ \{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_j \in W \ | \ \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$$

が成立する。

3　線型写像

定義 3.1. 線型写像 $\mathbb{R}^n$ を定義域とし $\mathbb{R}^m$ を値域とする写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が（初等）線型写像であるとは、次の関係式（重ね合わせ原理）を満たすことを言う。

$$\begin{cases} T(a+b) = T(a) + T(b) \quad for\, \forall a, \forall b \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ T(\lambda a) = \lambda T(a) \quad for\, \forall a \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

定理 3.1. （初等）線型写像の性質

(1) $T(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$

(2) $T(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(v_j) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R},\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n)$

記録　N.S.